完全數(1):因數、因數函數、完全數

因數

> 對於任意兩個正整數 a、b，若存在一個正整數 c，使得 $a = b \times c$， 則稱「a 能爲 b 整除」，記作 $b \mid a$。
>
> 同時，b 則稱爲 a 的因數(factor)或約數(divisor)。又稱 a 爲 b 的倍數(multiple)。

顯然， 1 和 a 必然是 a 的因數。

若 b 爲 a 的因數，且 $1 < b < a$，則稱 b 爲 a 的眞因數(proper factor)或 眞約數(proper divisor)。

眞因數(proper factor) 和 眞約數(proper divisor) 有不同的演譯，有謂 a 的因數中，所有不等於 a 的因數皆稱爲眞約數(proper divisor)，是故，眞約數包括 1。惟若在不作出特別聲下，本文不將二者區別，兩者皆包括 1。

例：

1. $18 = 2 \times 9$， 所以 2 整除 18
2. 2 和 9 皆是 18 的因數
3. 18 是 2 和 9 的倍數
4. 18 的因數有：1，2，3，6，9，18

因數函數

> 正整數 n 的所有因數的總和，$\sigma(n)$ 稱爲 n 的「因數函數(divisor function)」，其中
>
> $$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$$
>
> 亦有簡單地稱之爲「n 的因數和(sum of divisors of n」。

例如，18 的因數有 1，2，3，6，9，18，所以 $\sigma(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$。
又，30 的因數有 1，2，3，5，6，10，15，30，所以 $\sigma(30) = 1+2+3+5+6+10+15+30 = 72$。

以下爲 1 到 30 各數的因數函數值:

$\sigma(1) = 1$

$\sigma(2) = 1 + 2 = 3$

$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$

$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$

$\sigma(5) = 1 + 5 = 6$

$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

$\sigma(7) = 1 + 7 = 8$

$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$\sigma(9) = 1 + 3 + 9 = 13$

$\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$

$\sigma(11) = 1 + 11 = 12$

$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$

$\sigma(13) = 1 + 13 = 14$

$\sigma(14) = 1 + 2 + 7 + 14 = 24$

$\sigma(15) = 1+3+5+15 = 24$

$\sigma(16) = 1+2+4+8+16 = 31$

$\sigma(17) = 1+17 = 18$

$\sigma(18) = 1+2+3+6+9+18 = 39$

$\sigma(19) = 1+19 = 20$

$\sigma(20) = 1+2+4+5+10+20 = 42$

$\sigma(21) = 1+3+7+21 = 32$

$\sigma(22) = 1+2+11+22 = 36$

$\sigma(23) = 1+23 = 24$

$\sigma(24) = 1+2+3+4+6+8+12+24 = 60$

$\sigma(25) = 1+5+25 = 31$

$\sigma(26) = 1+2+13+26 = 42$

$\sigma(27) = 1+3+9+27 = 40$

$\sigma(28) = 1+2+4+7+14+28 = 56$

$\sigma(29) = 1+29 = 30$

$\sigma(30) = 1+2+3+5+6+10+15+30 = 72$

由上表，不難得到：

1. $\sigma(n) > n$
   顯然，因爲 1 和 n 皆爲 n 的因數，所以 $\sigma(n) > n$。
2. 若 $\sigma(n) = n+1$，則 n 爲質數。
   若 $\sigma(n) = n+1$，除了 n 和 1 之外，n 再沒有其他的因數，所以 n 爲質數。
3. n 愈大並不一定 $\sigma(n)$ 愈大。 例如：$\sigma(24) > \sigma(25)$，$\sigma(28) > \sigma(29)$
4. 對於某些 n，$\sigma(n) = 2n$
   即 n 爲其眞約數之和。例如：$6 = 1+2+3$，$28 = 1+2+4+7+14$
5. 對於某些 n，$\sigma(n) > 2n$
   即 n 的眞約數之和大於 n。例如：24，30
   24 的眞約數有：1，2，3，4，6，8，12； $1+2+3+4+6+8+12 = 36 > 24$ ；
   30 的眞約數有：1，2，3，5，6，10，15； $1+2+3+5+6+10+15 = 42 > 30$
6. 對於某些 n，$\sigma(n) < 2n$
   即 n 的眞約數之和小於 n 。例如：5，27
   5 的眞約數只有：1，$1 < 5$
   27 的眞約數有：1，3，9； $1+3+9 = 13 < 27$

完全數

顯然，對於任何正整數 n，有 (i) $\sigma(n) > 2n$，(ii) $\sigma(n) = 2n$ 或 (iii) $\sigma(n) < 2n$。

若 $\sigma(n) = \sum_{d\mid n} d = 2n$，則稱 n 爲完全數(Perfect Number)。 換句話說，若一個數等于其眞約數和，這個數就是「完全數」。

除「完全數」外，亦有稱之爲「完美數」、「完滿數」。

參考資料

1. 大辭海-數理化力學卷.上海辭書出版社,2005(P.77)
2. 沈康身.歷史數學名題賞識.上海辭書出版社,2010(P.29)