黃金三角形、黃金三角形螺線 (Golden Triangle、Golden Triangle Spiral)

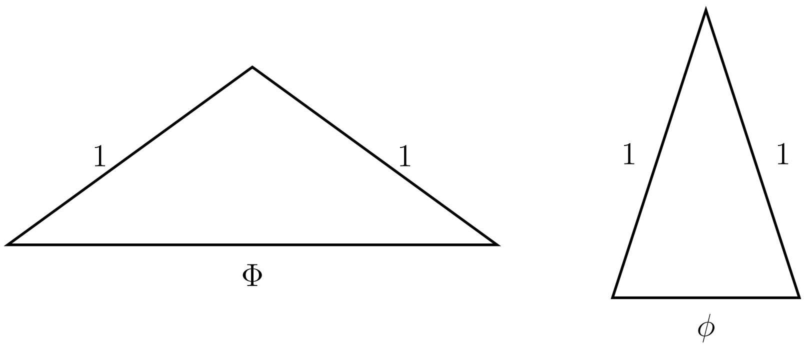
黃金比、黃金分割數

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\ 39887\cdots$$ 稱爲 **黃金比** (golden ratio)或 **黃金分割數** 。

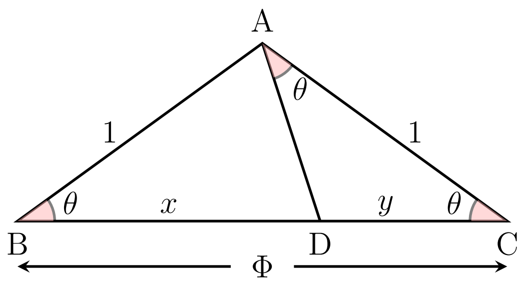
- 亦有人定義黃金比例爲 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$
- 爲分別這兩個數值，一般會以 ϕ 表示 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，而以 Φ 表示 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$
- 且有 $\Phi = \phi + 1$、$\Phi \times \phi = 1$、$\phi^2 = 1 - \phi$，$\Phi^2 = 1 + \Phi$，且 $\Phi > 1 > \phi > 0$。(詳見附錄一)

黃金三角形 Golden Triangle

黃金三角形 是一種特殊的等腰三角形，腰與底的比爲「黃金比」$1:\phi$ 、或 $1:\Phi$。
是故黃金三角形有鈍角黃金三角形和銳角黃金三角形兩種。



鈍角黃金三角形可分割得一個鈍角黃金三角形和一個銳角黃金三角形

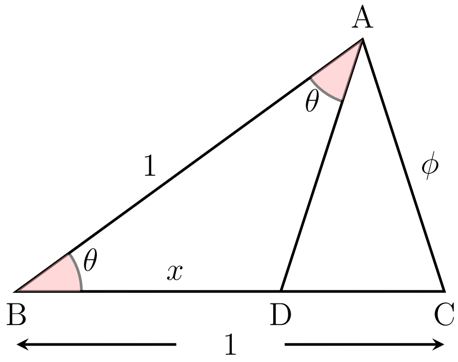


1. 如圖，$AB = AC = 1$，$BC = \Phi$；
2. 作 $\angle CAD = \angle BCA = \angle ABC = \theta$；
3. 設 $BD = x$、$DC = y$；
4. 因爲 $\angle B = \angle C$、$\angle C = \angle DAC$，$\triangle ABC \sim \triangle DCA$；
5. $1:\Phi = y:1$，$y = \dfrac{1}{\Phi} = \phi$，$x = \Phi - \phi = 1$
6. 由此，$\triangle BAD$ 爲一個銳角黃金三角形、$\triangle DAC$ 爲一個鈍角黃金三角形；
7. $\angle BDA = \angle BCA + \angle DAC = 2\theta$，$\angle BAD = \angle BDA = 2\theta$；
8. $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$，$5\theta = 180^\circ$，$\theta = 36^\circ$；

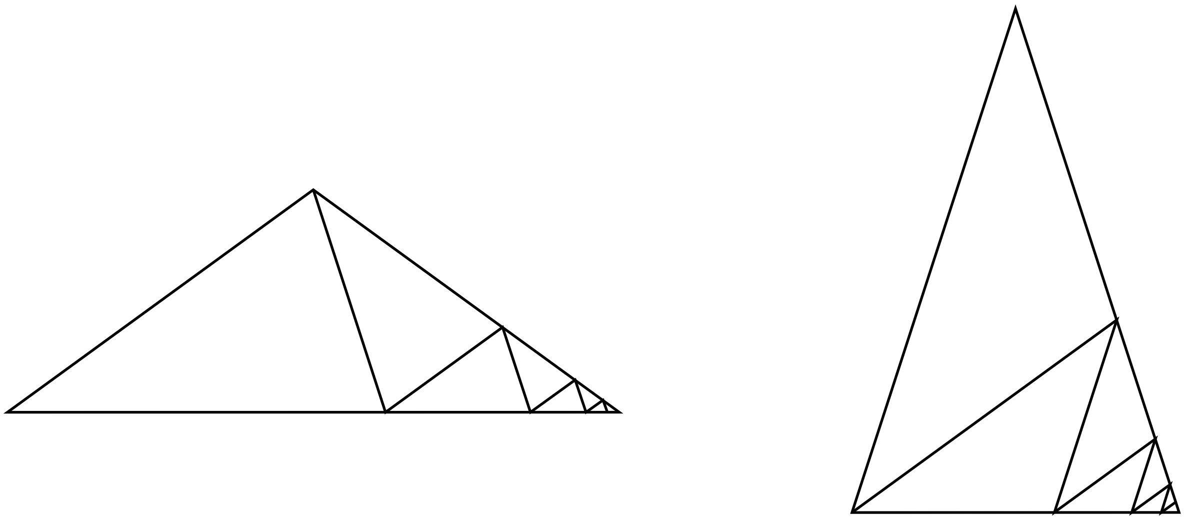
銳角黃金三角形的頂角爲 36°、底角 72°，
鈍角黃金三角形的頂角爲 108°、底角 36°。

銳角黃金三角形可分割得一個鈍角黃金三角形和一個銳角黃金三角形

1. 如圖，$BA = BC = 1$，$AC = \phi$、$\theta = 36°$；
2. 作 $\angle BAD = 36° = \angle ABC$；
3. 由此，$\angle B = \angle BAD = 36°$，$\angle BDA = 108°$，
   $\triangle ABD$ 是一個鈍角黃金三角形，$x : 1 = 1 : \Phi$，$x = \phi$，
4. $\angle ADC = 72° = \angle C$，$\angle DAC = 36°$，
   $\triangle ADC$ 是一個銳角黃金三角形。



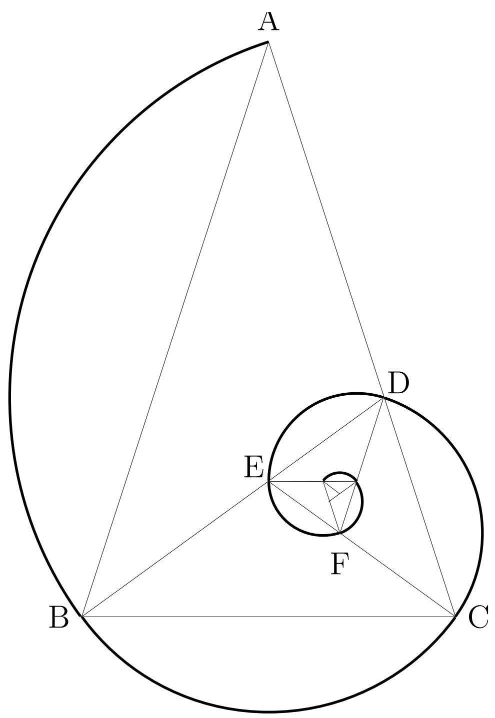
不斷分割得一連串的黃金三角形



正就是可以如此 無限分割 ，可以證明 Φ、ϕ 均是無理數。
詳見「正五邊形的邊和對角線是不可公度線段的幾何證明」一文。

黃金三角形螺線

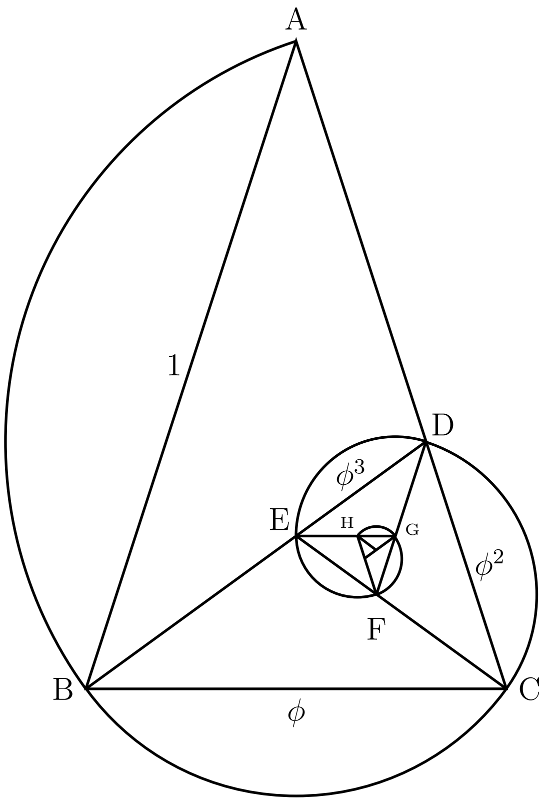
1. 如圖，$\triangle ABC$ 爲一銳角黃金三角形
2. 作 $\angle ABC$ 的角平分線，與 AC 交于 D；
3. 以 D 爲圓心，過 A 作弧 $\overset{\frown}{AB}$；
4. 作 $\angle BCD$ 的角平分線，與 BD 交于 E；
5. 以 E 爲圓心，過 B 作弧 $\overset{\frown}{BC}$；
6. 作 $\angle CDE$ 的角平分線，與 CE 交于 F；
7. 以 F 爲圓心，過 C 作弧 $\overset{\frown}{CD}$；
8. 如此不斷的重複下去，可以得到一條「螺線」，這條「螺線」，稱之爲「 黃金三角形螺線 」(Golden Triangle Spiral)。



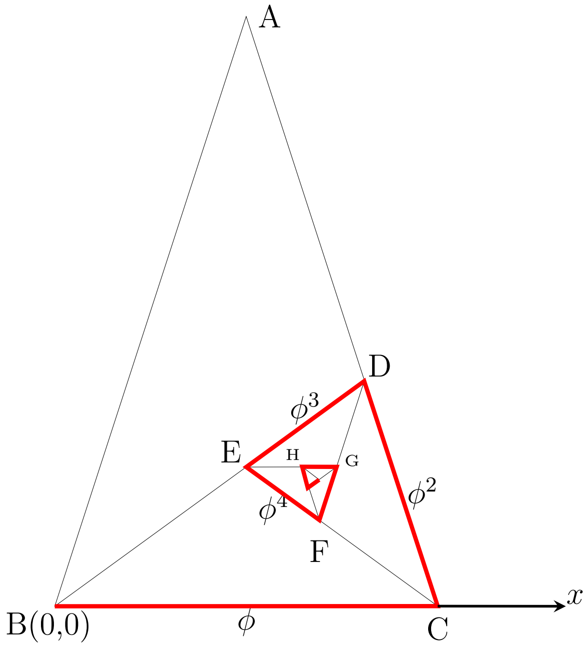
- 有些人稱黃金三角形螺線是一條「對數螺線」；查實，黃金三角形螺線、黃金矩形螺線、斐波那契螺線、黃金螺線與「對數螺線」或「等角螺線」(Logarithmic Spiral)非常近似，但基本上是不同的曲線。(詳見「斐波那契螺線」一文。)
- 「對數螺線」(Logarithmic Spiral)亦稱爲「等角螺線」(Equiangular Spiral)，其極坐標方程爲 $r = ae^{b\theta}$ 或 $\ln r = \ln a + b\theta$，其中 a、b 皆爲常數；
- 對數螺線的曲率，κ 可表爲 $\kappa = \dfrac{1}{r\sqrt{1+b^2}}$，
- 對數螺線上的點，若是愈遠離「極點」(Pole)，其曲率愈小，同時，曲率的轉變是順滑的、連續的；
- 相同的曲線，其曲率在對應的點是相同的；對於圓弧上的點，曲率爲半徑的倒數；
- 上圖的黃金三角形螺線，圓弧上 $\overset{\frown}{AB}$ 上各點的曲率皆爲 $\dfrac{1}{DA}$，圓弧上 $\overset{\frown}{BC}$ 上各點的曲率皆爲 $\dfrac{1}{EB}$；
- 顯然，沿著黃金三角形螺線走，由 A 到 B，再由 B 到 C，曲率在 B 點的轉變並不順滑、連續；同樣，在 C、D、E、$\cdots$ 等各點亦如是；
- 所以，黃金三角形螺線不是「對數螺線」。

黃金三角形螺線的「極點」

- 圖中的 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\cdots$ 皆爲黃金三角形；
- 設 $AB = 1$、$BC = \phi$；
- 因 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$，$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$，$CD = \phi^2$；
- 同樣，有 $DE = \phi^3$、$EF = \phi^4$、$FG = \phi^5$、$\cdots$；
- 在以上的過程中，連串的分割有以下特點：
  1. 分割是無盡的；
  2. 每一個「銳角黃金三角形」在較大的「銳角黃金三角形」內；
  3. 這些銳角黃金三角形一個比一個小，其底爲 ϕ、ϕ^2、ϕ^3、ϕ^4、$\ldots$ 成等比數列，因爲公比 $0 < \phi < 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \phi^n = 0$；
- 所以，黃金三角形的分割會凝聚、收縮到一點；
- 雖然，黃金三角形 形似 螺線，但姑且如一般的螺線稱「黃金三角形螺線」收縮到的這一點爲「極點」；

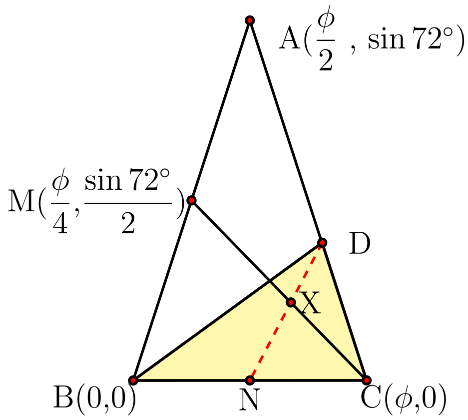


黃金三角形螺線「極點」的坐標



1. 路徑 $B \to C \to D \to E \to F \to G \cdots$ 可描述如：前 ϕ、左轉 $108°$、前 ϕ^2、左轉 $108°$、前 ϕ^3、左轉 $108°$、前 ϕ^4、左轉 $108°$、$\cdots$
2. 命 $\theta = 108°$，取 BC 的方向為 $0°$、CD 的方向為 θ、DE 的方向為 2θ、EF 的方向為 3θ、$\cdots$；
3. 取 B 點為原點 (0,0)，BC 的延線 為 x 軸；
4. $C = (\phi, 0)$、$D = (\phi + \phi^2 \cos\theta, \phi^2 \sin\theta)$；
5. $E = (\phi + \phi^2 \cos\theta + \phi^3 \cos 2\theta, \phi^2 \sin\theta + \phi^3 \sin 2\theta)$；
6. 若以複數來表示，複平面的實軸仍是 x 軸，
7. 命 $z = \cos\theta + i\sin\theta$；由「de Moivre 定理」，
$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
8. 所以，$D = \Big(\phi + \phi^2\cos\theta\Big) + i\phi^2\sin\theta = \phi + \phi^2 z$、$E = \phi + \phi^2 z + \phi^3 z^2$、$F = \phi + \phi^2 z + \phi^3 z^2 + \phi^4 z^3$；
9. 命「極點」為 X，$X = \lim\limits_{n\to\infty} \phi\Big(1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \phi^3 z^3 + \cdots + \phi^n z^n\Big)$；
10. 顯然，1、ϕz、$\phi^2 z^2$、$\phi^3 z^3$、$\cdots$ 成等比數列，公比為 ϕz；
11. 複數的等比數列$\{a_n\}$，亦可得無限項之和，若公比 r 的模 $|r|$ 滿足 $|r| < 1$，$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$；
12. 因 $\phi z = \phi\cos\theta + i\phi\sin\theta$，$|\phi z| = \sqrt{\phi^2\cos\theta + \phi^2\sin^2\theta} = \phi$，故 $0 < |\phi z| = \phi < 1$，由此，
$$X = \phi\Big(1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \cdots + \cdots\Big) = \frac{\phi}{1-\phi z} = \frac{\phi}{1 - \phi\cos\theta - i\phi\sin\theta} = \frac{\phi\Big(1 - \phi\cos\theta + i\phi\sin\theta\Big)}{1 - 2\phi\cos\theta + \phi^2}$$
13. 由鈍角黃金三角形及餘弦定理，$\cos\theta = \dfrac{2 - \Phi^2}{2} = -\dfrac{\phi}{2}$，$X = \dfrac{\phi\Big(1 - \phi\cos\theta + i\phi\sin\theta\Big)}{1 + 2\phi^2}$
14. 若以直角坐標來表示 X，$X = \left(\dfrac{\phi(1-\phi\cos\theta)}{1+2\phi^2}, \dfrac{\phi^2\sin\theta}{1+2\phi^2}\right) = \left(\dfrac{\phi(2+\phi^2)}{2(1+2\phi^2)}, \dfrac{\phi^2\sin\theta}{1+2\phi^2}\right)$

黃金三角形螺線「極點」的幾何意義



- 現證明，「極點」X 在中線 CM 上；
- 因 $\sin\theta = \sin 108° = \sin 72°$， CM : $y = \dfrac{2\sin\theta}{3\phi}(\phi - x)$
- 代 $x = \dfrac{\phi(2+\phi^2)}{2(1+2\phi^2)}$，得 $y = \dfrac{\phi^2\sin\theta}{1+2\phi^2}$；故 X 在 CM 上；
- 用類似分形自相似的性質來理解，這極點亦應在 $\triangle BCD$ 的中線 DN 上；
- 故 X 為 CM 與 DN 的交點。

參考資料

1. 黃金分割與黃金比簡介.(http://mathsgreat.com/goldsect/goldsect_001.pdf)
2. 正五邊形的邊和對角線是不可公度線段的幾何證明.(http://mathsgreat.com/article/article_047.pdf)
3. 黃金矩形、黃金矩形螺線.(http://mathsgreat.com/goldsect/goldsect_002.pdf)
4. 斐波那契螺線.(http://mathsgreat.com/curvefamily/curvefamily_036.pdf)
5. 對數螺線 Logarithmic Spiral(http://mathsgreat.com/curve/curve_indiv_025.pdf)
6. 乘方、開方、de Moivre 定理.(http://mathsgreat.com/complex/complex_002.pdf)

附錄一：黃金分割

黃金分割 (golden section)

將給定的線段(圖中的 AB)，分爲兩段，使其中的一段(圖中的 AP)是全段(AB)與其餘的一段(PB)的 **等比中項** [1]，即

$$AB : AP = AP : PB$$

這樣的分割稱爲 **黃金分割** 。

- 設 $AB = a,\ AP = x,\ PB = a - x$
- 由 $AB : AP = AP : PB,\quad AP^2 = AB \times PB,\quad x^2 = a(a-x)$
- $x^2 + ax - a^2 = 0,\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}a$ 捨去負值，得 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$；
- $AP = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$。

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\ 39887\cdots$ 稱爲 **黃金比** (golden ratio)或 **黃金分割數** 。

- 因爲 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，$AB : AP = a : x = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} \times \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$
$$AB : AP = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$
- 是故亦有人定義黃金比例爲 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$
- 爲分別這兩個數值，一般會以小草 ϕ 來表示 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$，
而以大楷 Φ 來表示 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$
- 其中，$\Phi - \phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$、$\Phi \times \phi = 1$。

[1]若 $a : x = x : b$，則稱 b 爲 a、b 的 比例中項 (mean proportion)。