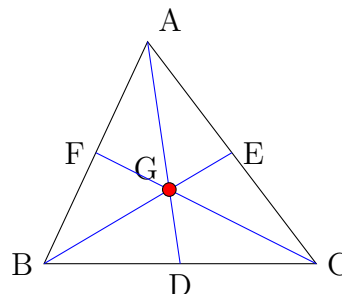


三角形重心定理 (Centroid Theorem)

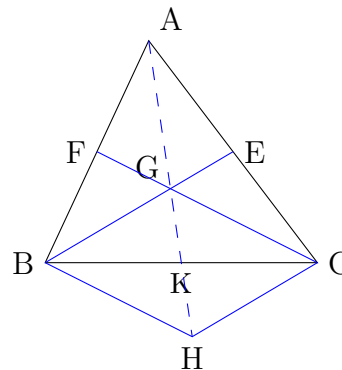
三角形的三條中線相交於一點，
這個點到頂點的距離是它到對邊中點距離的 2 倍。

- 三角形的一個頂點與其對邊中點的連線，稱為三角形的 **中線**；所以一個三角形有三條中線；
- 如圖，若 D 、 E 、 F ，分別為 BC 、 AC 、 AB 的中點，則 AD 、 BE 、 CF 為 $\triangle ABC$ 的三條中線。
- 這定理指出
 1. 三條中線相交於一點；這一交點稱為三角形的 **重心**(Centroid)(亦有稱為 **形心**)。
 2. 如圖，若命這一交點為 G ，則
$$AG = 2GD, \quad BG = 2GE, \quad CG = 2CF$$



證明(1)

1. 設 E 、 F ，分別為 AC 、 AB 的中點，
命交點為 G
2. 延長 AG 至 H 使得 $AG = GH$ ， AH 交 BC 於 K 。
3. 因 $AG = GH$ ， $AF = FB$ ，
由 **三角形中位線定理**， $CF \parallel BH$ ；
4. 同理， $BE \parallel CH$ ；
5. 由此， $BGCH$ 為一平行四邊形；
6. 由 **平行四邊形性質定理**，平行四邊形的對角線互相平分，
所以， $BK = KC$ ， $GK = KH$ ，由此， AK 實為由 A 到 BC 的中線。
 $\triangle ABC$ 的 **三條中線相交於一點**。
7. 亦因為 $AG = GH = 2GK$ ， G 到頂點 A 的距離是它到對邊中點 K 距離的 2 倍。



證明(2)

1. 設 E 、 F ，分別為 AC 、 AB 的中點， BE 、 CF 交於 G

2. 命 BG 的中點為 H ， CG 的中點為 K ，

3. 因 $AE = EC$ ， $AF = FB$ ，

由三角形中位線定理， $FE \parallel BC$ ， $FE = \frac{1}{2}BC$ ；

4. 同理， $HK \parallel BC$ ， $HK = \frac{1}{2}BC$ ；

5. 由此， $FE \parallel BC \parallel HK$ ， $FE = \frac{1}{2}BC = HK$ ；

6. 由平行四邊形判別定理， $FEKH$ 為一平行四邊形；

7. 由平行四邊形性質定理，平行四邊形的對角線互相平分，
 $EG = GH$ ，由此 $BG = \frac{2}{3}BE$

8. 即 BE 、 CF 交於 BE 上的一點 G ，其中 $BG = \frac{2}{3}BE$

9. 同理，若中線 BE 、 AD 交於 BE 上的一點 G' ，亦可證得 $BG' = \frac{2}{3}BE$ ，
由此， G' 、 G 為同一點，

10. 所以，三條中線相交於一點 G ，且由 G 到一頂點的距離是它到對邊中點距離的 2 倍。

註：

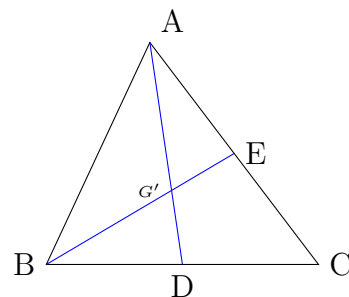
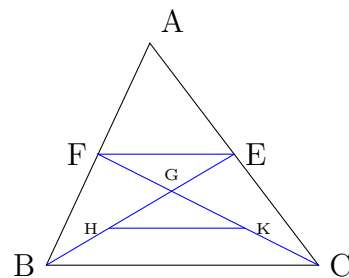
1. 在證明 $BG = \frac{2}{3}BE$ 的時候，本毋須引入 H 、 K ，

2. 因為 $FE \parallel BC$ ， $FE : BC = 1 : 2$ ，由 $\triangle EGF \sim \triangle BGC$ ，可直接得知 $BG : GE = 1 : 2$ ，
惟因希望盡量避免使用相似三角形性質，是以用上述的證明。

3. 為避免出現循環論證(由 A 證明 B，而 A 的證明卻是由 B 導出)，一般書本都只使用早前宣
示過，證明過的定理。

4. 以 Durell 的 A New Geometry for Schools 為例，三角形重心定理編號為 28，而有關相似圖形
的討論卻安排在該書的第三部分、定理 70 後。

5. 雖然三角形重心定理並不包含在歐幾里得的幾何原本內，惟相似圖形亦只安排在幾何原本的
第六卷才作出有關討論。



證明(3)

1. 設 D 、 E 、 F ，分別為 BC 、 AC 、 AB 的中點， BE 、 CF 交於 G (右圖刻意地不將 D 放在 BC 的中點位置上。)

2. 命 BG 的中點為 H ， CG 的中點為 K ，

3. 聯 AG 、 GD (今欲證明： AGD 為一直線，且 $AG = \frac{2}{3}AD$)

4. 如證明(2)，有：(1) $FEKH$ 為一平行四邊形；

(2) $FG = GK = KC$ ；(3) $FH = \frac{1}{2}AG$ ；(4) $FH \parallel AG$ ；

5. 因 BG 的中點為 H ， BC 的中點為 D ，

6. 由三角形中位線定理，

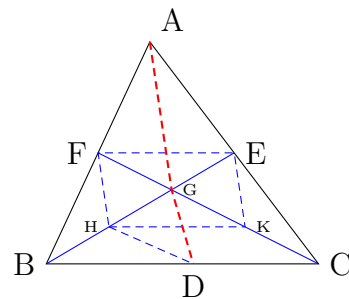
$DH \parallel CG$ ， $DH = \frac{1}{2}CG$ ；

7. 由此， $DH \parallel GF$ ， $DH = \frac{1}{2}CG = GF$ ；

8. 所以， $HDGF$ 為一平行四邊形；

9. $GD = FH = \frac{1}{2}AG$ ，且 $AG \parallel FH \parallel GD$

10. 由此， AGD 為一直線。



性質(1)

若 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，則， $S_{\triangle AGB} = S_{\triangle AGC} = S_{\triangle BGC}$
(以 $S_{\triangle AGB}$ 記 $\triangle AGB$ 面積)。

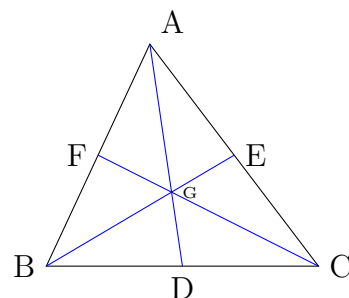
1. 因 $BD = DC$ ，由等底等高的三角形面積相等，

有 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$ ， $S_{\triangle GBD} = S_{\triangle GDC}$ ，

2. $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle GBD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle GCD} = S_{\triangle ACG}$

3. 同理， $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG}$

4. 所以， $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG}$



參考資料

1. 賀功保、葉美雄·三角形的五心·哈爾濱工業大學出版社·(第 36 頁)

2. Durell.A New Geometry for Schools,1963 (P.192)