斐波那契數列性質(10):比內(Binet)公式

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

1 比內

比內(Jacques Philippe Marie Binet,1786—1856)為法國數學家,天文學家。

歐拉，棣莫弗，D.伯努利早已知道 比內(Binet)公式 ，這公式早見於 18 世紀棣莫弗(Abraham de Moivre,1667-1754)的《分析集錦》一書中。惟因為其最初的證明是由比內在1843年完成，又因為比內提出了一個更有助推廣應用的 Binet Form，所以一般稱這公式為 比內公式 。

這個公式的左端為正整數，而右端卻由無理數表示，且與黃金分割連在一起，是一個絕配。

2 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 及 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的出現

處理具遞歸關係 $u_{k+2} = Au_{k+1} + Bu_k$ 的數序 $\{u_n\}$，求其通的方法如下：

1. 求 α, β，即使得 $\alpha + \beta = A, \alpha\beta = -B$;
   能滿足這些條件的 α, β，正就是方程 $x^2 = Ax + B(x^2 - Ax - B = 0)$ 的兩個根。
2. 由此

$$\begin{aligned} u_{k+2} &= Au_{k+1} + Bu_k \\ u_{k+2} &= (\alpha+\beta)u_{k+1} - \alpha\beta u_k \\ u_{k+2} - \alpha u_{k+1} &= \beta u_{k+1} - \alpha\beta u_k \\ u_{k+2} - \alpha u_{k+1} &= \beta(u_{k+1} - \alpha u_k) \end{aligned}$$

3. 由此，得數序 $\{T_n\}$，其中 $T_k = u_{k+1} - \alpha u_k$
4. 因為 $u_{k+2} - \alpha u_{k+1} = \beta(u_{k+1} - \alpha u_k)$，所以 $T_{k+1} = \beta T_k$
5. 由此，$T_{k+1} = \beta T_k = \beta^2 T_{k-1} = \beta^3 T_{k-2} = \cdots = \beta^{k+1} T_0$
6. 由此得 $T_{k+1} = u_{k+2} - \alpha u_{k+1} = \beta^{k+1}(u_1 - \alpha u_0)$ (*)
7. 同理得 $T_{k+1} = u_{k+2} - \beta u_{k+1} = \alpha^{k+1}(u_1 - \beta u_0)$ (**)
8. 由 (*)，(**)，消去 u_{k+1}，便可得 u_{k+2} 並求出通項。
9. 因為斐波那契數序有遞歸關係 $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$，且 $F_1 = 1, F + 0 = 0$，
   由方程 $x^2 - x - 1 = 0$，得兩個根 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

證明 (一)

由上一節，有

$$F_{k+2} - \alpha F_{k+1} = \beta^{k+1}(1-0) = \beta^{k+1} \qquad (1)$$
$$F_{k+2} - \beta F_{k+1} = \alpha^{k+1}(1-0) = \alpha^{k+1} \qquad (2)$$

$\alpha \times (2) - \beta \times (1),$

$$(\alpha - \beta)F_{k+2} = \alpha^{k+2} - \beta^{k+2}$$
$$F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2})$$
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

證明 (二)

1. 若 x 具有 $x^2 = x + 1$ 性質，
2. 有，
$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 + x, & x^3 &= (x+1) + x &&= 2x+1 \\ x^4 &= x^3 + x^2, & x^4 &= (2x+1) + (x+1) &&= 3x+2 \\ x^5 &= x^4 + x^3, & x^5 &= (3x+2) + (2x+1) &&= 5x+3 \\ x^6 &= x^5 + x^4, & x^6 &= (5x+3) + (3x+2) &&= 8x+5 \end{aligned}$$
3. 用數學歸納，由 $x^k = x^{k-1} + x^{k-2}$，可以證明 $x^k = F_k x + F_{k-1}$
4. 因 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 及 $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 都是 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根, 滿足 $x^2 = x + 1$ 關係，
5. 所以 $\alpha^k = F_k \alpha + F_{k-1}, \qquad \beta^k = F_k \beta + F_{k-1}$
6. $(\alpha^k - \beta^k) = F_k(\alpha - \beta)$
7. $F_k = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha^k - \beta^k)$
8. $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$
9. 因 α, β 爲 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根,有 $\alpha\beta = -1, \qquad \beta = -\frac{1}{\alpha}$
10. 故此，亦有將比內公式表爲 $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \frac{1}{(-\alpha)^k})$

參考資料

1. 俞曉群.自然數中的明珠.P.121.