

斐波那契數列性質(9)：卡西尼公式 $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

$$\begin{array}{lll} 1 \times 2 - 1^2 = (-1)^2 & 3 \times 8 - 5^2 = (-1)^5 & 13 \times 34 - 21^2 = (-1)^8 \\ 1 \times 3 - 2^2 = (-1)^3 & 5 \times 13 - 8^2 = (-1)^6 & 21 \times 55 - 34^2 = (-1)^9 \\ 2 \times 5 - 3^2 = (-1)^4 & 8 \times 21 - 13^2 = (-1)^7 & \dots\dots\dots \dots \end{array}$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 2)$$

證明

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) - (F_{n-1} + F_{n-2})^2 \\ &= F_{n-1}F_n + F_{n-1}^2 - F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_{n-2} - F_{n-2}^2 \\ &= F_{n-1}F_n - 2F_{n-1}F_{n-2} - F_{n-2}^2 \\ &= F_{n-1}(F_{n-1} + F_{n-2}) - 2F_{n-1}F_{n-2} - F_{n-2}^2 \\ &= F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_{n-2} - 2F_{n-1}F_{n-2} - F_{n-2}^2 \\ &= F_{n-1}^2 - (F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2) \\ &= F_{n-1}^2 - F_{n-2}(F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n = (-1)(F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2) \\ &\dots\dots\dots \\ &= (-1)^{n-2}(F_1F_3 - F_2^2) = (-1)^{n-2}(2 - 1) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

卡西尼

卡西尼 (Giovanni Domenico Cassini, 1625–1712)，天文學家。1625年生於意大利，曾任職 Panzano 天文台 (於 Chianti, Tuscany)、Bologna 大學首職天文學家。1669年往法國，助法皇路易十四建立巴黎天文台，1712年卒於巴黎。

1666年他測定火星自轉周期為 24 小時 40 分 (誤差約 3 分)；1668 年公布第一個木星曆表。卡西尼對土星的貢獻尤多，發現土星的四顆衛星 - 土衛五 (Rhea)、土衛八 (Iapetus)、土衛四 (Dione) 和土衛三 (Tethys)，1679 年發現土星光環中的一道暗縫 - “卡西尼環縫” (Cassini Division)。

1980 年代初，美國國家航空航天局 (NASA)、歐洲航天局 (ESA) 和意大利航天局 (ASI) 成立了一個“卡西尼—惠更斯”合作項目，目的是探測土星，進行軌道探測和著陸探測。軌道探測器重六噸，名為“卡西尼號”，1997 年 10 月發射往土星軌道。卡西尼號環繞土星飛行，對土星及其大氣、光環、衛星和磁場進行深入考察。著陸探測器則名為惠更斯 (Huygens) 號，負責登陸土星最大的月亮泰坦 (Titan)。

參考資料

1. 俞曉群. 自然數中的明珠. P.121.