共軛複數 (Conjugate Complex Numbers)

若 $z=a+bi$，則 $a-bi$ 稱爲 z 的共軛複數(Conjugate Complex Number)，並記作 $\overline{z}$。

共軛複數的一些性質

性質(1) $\overline{\overline{z}}=z$

(a) 若 $z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$；

(b) $\overline{\overline{z}}=a+bi=z$

性質(2) $z+\overline{z}=2\text{Re } z$

(a) 若 $z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$；

(b) $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)$
$=2a=2\times\text{Re } z$

性質(3) $z-\overline{z}=2\text{Im } z\times i$

(a) 若 $z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$；

(b) $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$
$=2\times\text{Im } z\times i$

性質(4) $\overline{k\times z}=k\times\overline{z}$，其中 k 爲實數

(a) 若 $z=a+bi$，$k\times z=ka+kbi$；

(b) $\overline{k\times z}=ka-kbi$

(c) $k\times\overline{z}=k(a-bi)=ka-kbi$

(d) $\overline{k\times z}=k\times\overline{z}$

性質(5) $z\overline{z}=|z|^2$

(a) 若 $z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$；

(b) $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$=|z|^2$

性質(6) $|z|=|\overline{z}|$

(a) 若 $z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$；

(b) $|z|=\sqrt{a^+b^2}=|\overline{z}|$

性質(7) $\text{Arg }\overline{z}=-\text{Arg } z$

(a) 若 $z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$；

(b) $\text{Arg }\overline{z}=\tan^{-1}\dfrac{-b}{a}=-\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$
$=-\text{Arg } z$

性質(8) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(a) 若 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$；

(b) $z_1\pm z_2=(a\pm c)+(b\pm d)i$；

(c) $\overline{z_1\pm z_2}=(a\pm c)-(b\pm d)i$；

(d) $\overline{z_1}\pm\overline{z_2}=(a-bi)\pm(c-di)$
$=(a\pm c)-(b\pm d)i=\overline{z_1\pm z_2}$

性質(9) $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$

(a) 若 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$；

(b) $z_1\times z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$；

(c) $\overline{z_1\times z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i$；

(d) $\overline{z_1}\times\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)$
$=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{z_1\times z_2}$

性質(10) $\overline{z_1\times z_2\times\cdots\times z_n}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}\times\cdots\times\overline{z_n}$
由性質(9)，用數學歸納法可證得。

性質(11) 對于正整數 n，$\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$
由性質(10)，代 $z=z_1=z_2=\cdots=z_n$
可證得。

性質(12) $\overline{\left\{\dfrac{z_1}{z_2}\right\}}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(a) 若 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$；

(b) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$
$=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$
$=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

(c) $\overline{\left\{\dfrac{z_1}{z_2}\right\}}=\dfrac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$

(d) $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{a-bi}{c-di}=\dfrac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}$
$=\dfrac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}=\overline{\left\{\dfrac{z_1}{z_2}\right\}}$

參考資料

1. 數學百科全書第一卷(A-C).科學出版社,1994(P.713)
2. 谷超豪.數學詞典.上海辭書出版社,1992(P.15)
3. R.Courant,H.Robbins.What is Mathematics.OUP,1996(P.88)
4. G.H.Hardy.A Course of Pure Mathematics.Cambridge University Press,1921(P.81)