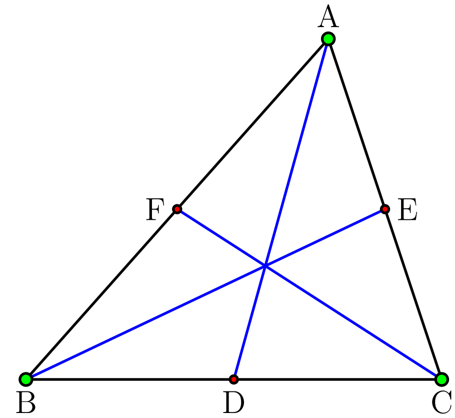
中線(Median)

> 連結三角形頂點和它對邊中點的線段，叫做三角形的中線(median)。

如圖，$\triangle ABC$ 三條邊的中點分別爲 D、E、F，則 $\triangle ABC$ 的三條中線爲 AD、BE、CF。

1. 一個三角形有三條中線；
2. 三條中線皆在三角形內；
3. 三條中線共點於重心(centroid)[a]；



[a]三角形重心定理

中線的一些性質

對于 $\triangle ABC$，分別以 a、b、c、m_A、m_B、m_C 表示 BC、AC、AB 及中線 AD、BE、CF 的長度，

性質(1) $m_A^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$、$m_B^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{2}$、$m_C^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

性質(2) $m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

性質(3) 以三條中線爲邊長的三角形面積爲原三角形的 $\frac{3}{4}$ 倍

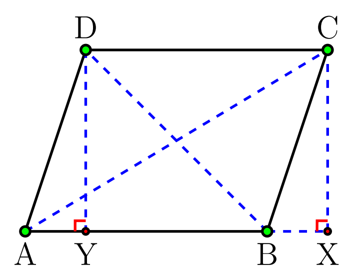
性質(4) 中線上的一點到兩邊的距離與兩邊長成反比

性質(5) 到三角形兩邊的距離與兩邊長成反比的點在中線上

性質(6) 三角形中線等分對應底邊的平行線，其逆命題亦成立

引理（1）

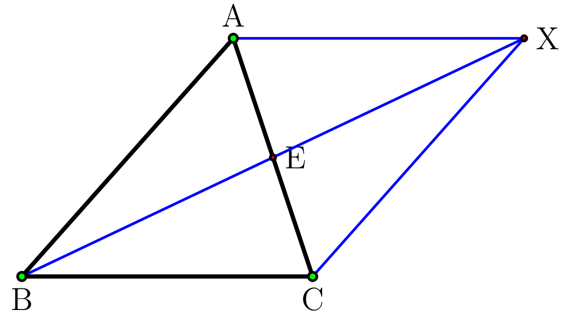
> 平行四邊形四條邊的平方和等于對角線的平方和



證明：

1. 如圖，$ABCD$ 爲一平行四邊形，命 C、D 到 AB 或其延線上的垂足爲 X、Y；
2. $AC^2 = AX^2 + CX^2$
   $= (AB^2 + 2AB \cdot BX + BX^2) + CX^2$；
4. $BD^2 = (AB^2 - 2AB \cdot AY + AY^2) + DY^2$；
5. 因 $AY = BX$，
   $AC^2 + BD^2$
   $= AB^2 + BX^2 + CX^2 + AB^2 + AY^2 + DY^2$
6. 因 $BC^2 = BX^2 + XC^2$、$AB^2 = CD^2$、
   $AD^2 = AY^2 + DY^2$
7. $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2$

性質 1：證明



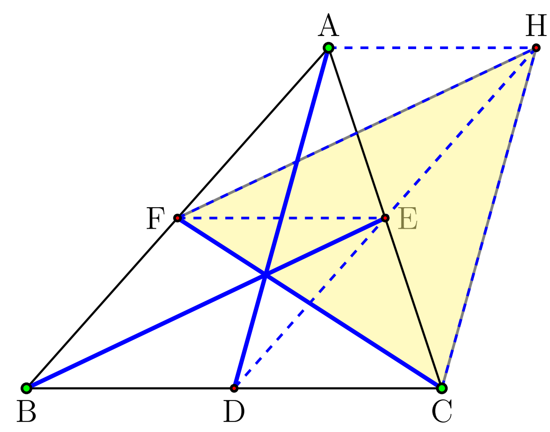
1. 延長 BE 至 X，使得 $BE = EX$，
   因爲 $AE = EC$，$ABCX$ 爲一平行四邊形；
2. $AX = BC = a$、$AB = CX = c$、$AC = b$、
   $BE = EX = m_B$、$BX = 2m_B$；
3. $AB^2 + BC^2 + CX^2 + AX^2 = 2c^2 + 2a^2$；
4. $BX^2 + AC^2 = 4m_B^2 + b^2$；
5. 由引理，$4m_B^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2$；
6. $m_B^2 = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{c^2}{2}$；
7. 同理，$m_A^2 = -\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2}$、$m_C^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$。

性質 2：證明

1. $m_A^2 = -\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2}$、 $m_B^2 = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{c^2}{2}$、 $m_C^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$
2. $m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 = \dfrac{3}{4}a^2 + \dfrac{3}{4}b^2 + \dfrac{3}{4}c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

性質 3：證明

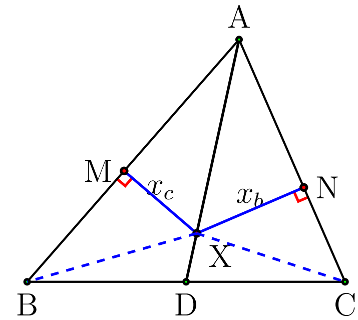
如圖，$\triangle ABC$ 的三條中線爲 AD、BE、CF；



1. 作 H，使得 $AH \parallel DC$、$AD \parallel HC$；
2. $ADCH$ 爲平行四邊形，$AD = CH$；
3. AC、DH 交于 E；
4. $AH \overset{\parallel}{=} BD$，$ABDH$ 亦是平行四邊形；
5. $HE \parallel FB$，$HE = \dfrac{HD}{2} = \dfrac{AB}{2} = BF$；
6. $FBEH$ 亦是平行四邊形；$BE = FH$；
7. $\triangle FCH$ 的邊長爲 $\triangle ABC$ 的中線長；
8. 由三角形中位線定理，$FE \parallel BC$，
   $FE \parallel AH$，$FE = \dfrac{BC}{2} = DC = AH$；
9. $AFEH$ 亦是平行四邊形；
10. $\triangle FEH$面積 $= \triangle AEH$面積 $= \triangle ECH$面積
11. $\triangle FEH$面積 $+ \triangle ECH$面積 $= \triangle ACH$面積
    $= \triangle ADC$面積 $= \dfrac{1}{2} \triangle ABC$面積
12. $\triangle FEC$面積 $= \dfrac{1}{2}\triangle AFC$面積 $= \dfrac{1}{4}\triangle ABC$面積
13. $\triangle FCH$面積 $= \dfrac{3}{4} \triangle ABC$面積

性質 4：證明

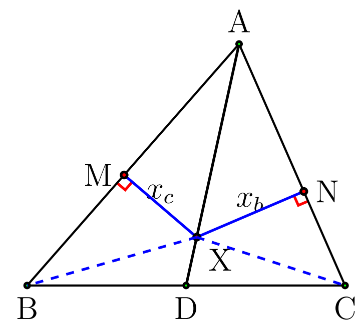
中線上的一點到兩邊的距離與兩邊長成反比。
若 X 為中線 AD 上的一點，X 到 AC、AB 的距離分別為 x_b、x_c，則 $\dfrac{x_b}{x_c}=\dfrac{c}{b}$



1. 因 AD 為中線，$BD=DC$；
2. $\triangle ABD$面積 $=\triangle ACD$面積、$\triangle XBD$面積 $=\triangle XCD$面積，$\therefore \triangle ABX$面積 $=\triangle ACX$面積；
3. $\dfrac{1}{2}x_c\times AB=\dfrac{1}{2}x_b\times AC$，$\dfrac{x_b}{x_c}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}$ ■

性質 5：證明

到三角形兩邊的距離與兩邊長成反比的點在中線上；
命 X 到 AC、AB 的距離分別為 x_b、x_c，
若 $\dfrac{x_b}{x_c}=\dfrac{c}{b}$，$X$ 在中線上



1. 命 AX (或其延線) 交 BC 于 D；
2. $\dfrac{x_b}{x_c}=\dfrac{c}{b}$，$x_c\times c=x_b\times b$
3. $\triangle AXB$面積 $=\triangle AXC$面積
4. $\triangle AXB$面積 : $\triangle XBD$面積 $=AX:XD$
   $\triangle AXC$面積 : $\triangle XCD$面積 $=AX:XD$
5. $\triangle AXB$面積 : $\triangle XBD$面積
   $=\triangle AXC$面積 : $\triangle XCD$面積
6. $\therefore\quad \triangle XBD$面積 $=\triangle XCD$面積
7. $\triangle ABD$面積 $=\triangle ACD$面積
8. $BD=CD$，AD 為中線，X 在中線上。

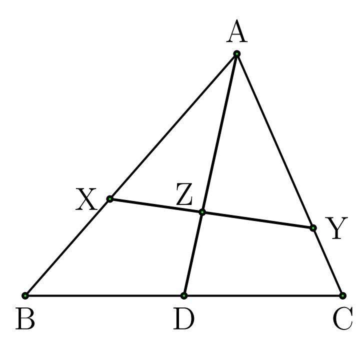
性質 6：證明

三角形中線等分對應底邊的平行線，其逆命題亦成立。

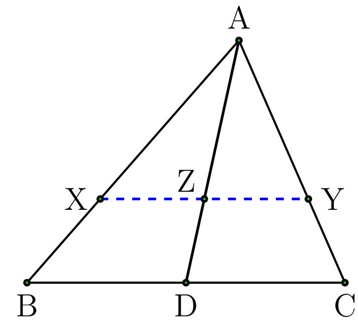
如圖，AD 為 $\triangle ABC$ 的一條中線，X、Y 分別在 AB、AC 上，且 XY 與 AD 交于 Z；

(a) 若 $XY\,/\!/\,BC$，則 $XZ=ZY$；

(b) 若 $XZ=ZY$，則 $XY\,/\!/\,BC$。



1. 若 $XY /\!/ BC$，



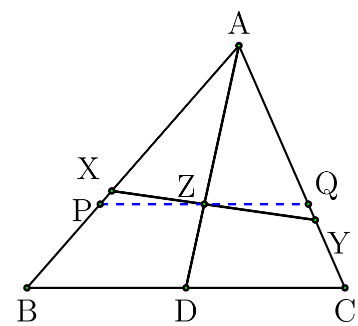
   (a) $\triangle AXZ \sim \triangle ABD$、$\triangle AZY \sim \triangle ADC$，

   (b) $\dfrac{AZ}{AD} = \dfrac{XZ}{BD}$、$\dfrac{AZ}{AD} = \dfrac{ZY}{DC}$

   (c) $\dfrac{AZ}{AD} = \dfrac{XZ}{BD} = \dfrac{ZY}{DC}$

   (d) 因 $BD = DC$，故 $XZ = ZY$

2. 若 $XZ = ZY$，假設 XY 與 BC 不平行；



   (a) 過 Z 作 BC 的平行線，分別與 AB、AC 交于 P、Q；

   (b) 因 $PQ /\!/ BC$，故 $PZ = ZQ$；

   (c) $XZ = ZY$、$\angle XZP = \angle YZQ$；

   (d) $\triangle XZP \equiv \triangle YZQ$，$\angle PXZ = \angle QYZ$；

   (e) 唯$\triangle AXY$ 的外角 $\angle PXZ > \angle QYZ$，矛盾！

   (f) 所以 $XY /\!/ BC$，逆命題亦成立。

參考資料

1. 三角形重心定理.(http://mathsgreat.com/geom_th/geom_th_028.pdf)
2. 三角形中位線定理.(http://mathsgreat.com/geom_th/geom_th_025.pdf)