

《九章算術》原文

今有共買金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。問人數、金價各幾何？

答曰：三十三人，金價九千八百。

今有共買羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三。問人數、羊價各幾何？

答曰：二十一人，羊價一百五十。

題意今釋

第 5 題 今有人合伙買金，每人出 400，多 3400；每人出 300，多 100。問人數、金價各幾何？

第 6 題 今有人合伙買羊，每人出 5，差 45；每人出 7，差 3。問人數、羊價各幾何？

題目今解

第 5 題) 設人數為 x ，金價為 y ，得方程組 第 6 題) 設人數為 x ，羊價為 y ，得方程組

$$\begin{cases} y = 400x - 3400 \\ y = 300x - 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 5x + 45 \\ y = 7x + 3 \end{cases}$$

解方程組，得 $x = 33$ 、 $y = 9800$

解方程組，得 $x = 21$ 、 $y = 150$

《九章算術》的解法：兩盈、兩不足術

兩盈、兩不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，以少減多，餘為實。兩盈、兩不足以少減多，餘為法。實如法而一。有分者，通之。兩盈、兩不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實，實為物價，法為人數。

其一術曰：置所出率，以少減多，餘為法。兩盈、兩不足以少減多，餘為實。實如法而一，得人數。以所出率乘之，減盈、增不足，即物價。

「兩盈、兩不足術」今譯：

兩盈、兩不足的算法是：列出所出率，將盈、不足各列在其下方。維乘所出率及盈、不足(即所出率及盈、不足 2 組的 2 個數交叉相乘)，將得到的兩個積以少減多，得「實」(被除數)。又將盈、不足以少減多，得「法」(除數)，得結果。若有分數，便要通分。盈、不足與同買物若相關，列出所出率，以少減多，用餘數去約「法」、「實」。「實」約後為物價，「法」約後為人數。

另一個算法是：將盈、不足以少減多，得「實」。由「實」、「法」得人數。由所出率乘人數，減去盈數又或加回不足數，可得物價。

第 5 題

今有共買金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。問人數、金價各幾何？

答曰：三十三人，金價九千八百。

- 置所出率，盈、不足各居其下

左	右
400	300
多 3400	多 100
- 令維乘所出率，以少減多，餘爲實。兩盈、兩不足以少減多，餘爲法

維乘： $400 \times 100 = 40000$ 、 $3400 \times 300 = 1020000$
 實： $1020000 - 40000 = 980000$ 法： $3400 - 100 = 3300$
- 實如法而一

每人應付出的「率」爲 $980000 \div 3300 = \frac{9800}{33}$
- 有分者，通之

因爲不涉及分數，略過。
- 置所出率，以少減多，餘

餘數爲： $400 - 300 = 100$
- 以約法、實。實爲物價，法爲人數

物價： $980000 \div 100 = 9800$
 人數： $3300 \div 100 = 33$
- 其一術曰：置所出率，以少減多，餘爲法。兩盈、兩不足以少減多，餘爲實。

法： $400 - 300 = 100$ 實： $3400 - 100 = 3300$
- 實如法而一，得人數。

人數： $3300 \div 100 = 33$
- 以所出率乘之，減盈、增不足，即物價。

物價： $400 \times 33 - 3400 = 9800$ ， $300 \times 33 - 100 = 9800$

第 6 題

今有共買羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三。問人數、羊價各幾何？
 答曰：二十一人，羊價一百五十。

- 置所出率，盈、不足各居其下

左	右
5	7
不足 45	不足 3
- 令維乘所出率，以少減多，餘爲實。兩盈、兩不足以少減多，餘爲法

維乘： $5 \times 3 = 15$ 、 $45 \times 7 = 315$
 實： $315 - 15 = 300$ 法： $45 - 3 = 42$
- 實如法而一

每人應付出的「率」爲 $300 \div 42 = \frac{50}{7}$
- 有分者，通之

因爲不涉及分數，略過。
- 置所出率，以少減多，餘

餘數爲： $7 - 5 = 2$
- 以約法、實。實爲物價，法爲人數

物價： $300 \div 2 = 150$
 人數： $42 \div 2 = 21$
- 其一術曰：置所出率，以少減多，餘爲法。兩盈、兩不足以少減多，餘爲實。

法： $7 - 5 = 2$ 實： $45 - 3 = 42$
- 實如法而一，得人數。

人數： $42 \div 2 = 21$
- 以所出率乘之，減盈、增不足，即物價。

物價： $5 \times 21 + 45 = 150$ ， $7 \times 21 + 3 = 150$

《九章算術注》原文

今有共買金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。問人數、金價各幾何？

答曰：三十三人，金價九千八百。

今有共買羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三。問人數、羊價各幾何？

答曰：二十一人，羊價一百五十。

兩盈、兩不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，以少減多，餘爲實。兩盈、兩不足以少減多，餘爲法。實如法而一。有分者，通之。兩盈、兩不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實，實爲物價，法爲人數。按：此術兩不足者，兩設皆不足於正數。其所以變化，猶兩盈。而或有勢同而情違者。當其爲實，俱令不足維乘相減，則遺其所不足焉。故其餘所以爲實者，無胸數以損焉。蓋出而有餘兩盈，兩設皆逾於正數。假令與共買物，人出八，盈三；人出九，盈十。齊其假令，同其兩盈。兩盈俱三十。舉齊則兼去，其餘所以爲實者，無盈數。兩盈以少減多，餘爲法。齊之八十者，是十假令，而凡盈三十者，是十，以三之；齊之二十七者，是三假令，而凡盈三十者，是三，以十之。今假令兩盈共十、三以三減十，餘七爲一實。故令以三減十，餘七爲法。所出率以少減多，餘謂之設差。因設差爲少設，則兩盈之差是爲定實。故以少設約法得人數，約實即得金數。

其一術曰：置所出率，以少減多，餘爲法。兩盈、兩不足以少減多，餘爲實。實如法而一，得人數。以所出率乘之，減盈、增不足，即物價。置所出率，以少減多，得一人之差。兩盈、兩不足相減，爲眾人之差。故以一人之差除之，得人數。以所出率乘之，減盈、增不足，即物價。

參考資料

1. 沈康身.中算導論.上海教育出版社,1986(P.85)
2. 《九章算術》卷第七盈不足(http://www.mathsgreat.com/CMhist/jiuzhang/jiuzhang_009.pdf)
3. 曾海龍.九章算術.江蘇人民出版社,2011(P.160)
4. 《九章算術》中的「盈不足術」.http://mathsgreat.com/gsj/gsj_013.pdf