

《九章算術》原文

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？
答曰：七人，物價五十三。

今有共買雞，人出九，盈一十一；人出六，不足十六。問人數、雞價各幾何？
答曰：九人，雞價七十。

今有共買璠，人出半，盈四；人出少半，不足三。問人數、璠價各幾何？
答曰：四十二人，璠價十七。

今有共買牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。問家數、牛價各幾何？
答曰：一百二十六家，牛價三千七百五十。

題意今釋

- 第 1 題 今有人合伙購物，每人出 8，多 3；每人出 7，差 4。問人數、物價各幾何？
- 第 2 題 今有人合伙買雞，每人出 9，多 11；每人出 6，差 16。問人數、雞價各幾何？
- 第 3 題 今有人合伙買璠，每人出 $\frac{1}{2}$ ，多 4；每人出 $\frac{1}{3}$ (少半)，差 3。問人數、璠價各幾何？
- 第 4 題 今有人合伙買牛，每 7 家共出 190，不足 330。每 9 家共出 270，多 30。問家數、牛價各幾何？

題目今解

第 1 題) 設人數為 x ，物價為 y ，得方程組 第 2 題) 設人數為 x ，雞價為 y ，得方程組

$$\begin{cases} y = 8x - 3 \\ y = 7x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 9x - 11 \\ y = 6x + 16 \end{cases}$$

解方程組，得 $x = 7$ 、 $y = 53$

解方程組，得 $x = 9$ 、 $y = 70$

第 3 題) 設人數為 x ，璠價為 y ，得方程組 第 4 題) 設家數為 x ，牛價為 y ，得方程組

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 190 \times \frac{x}{7} + 330 \\ y = 270 \times \frac{x}{9} - 30 \end{cases}$$

解方程組，得 $x = 42$ 、 $y = 17$

解方程組，得 $x = 126$ 、 $y = 3750$

《九章算術》的解法：盈不足術

盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法。實如法而一。有分者，通之。盈不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實。實為物價，法為人數。

其一術曰：并盈、不足為實。以所出率以少減多，餘為法。實如法得一人。以所出率乘之，減盈、增不足即物價。

「盈不足術」今譯：

盈不足的算法是：列出所出率，將盈、不足各列在其下方。維乘所出率及盈、不足(即所出率及盈、不足 2 組的 2 個數交叉相乘)，將得到的兩個積相併作為「實」(被除數)。將盈、不足相加作「法」(除數)，得結果。若有分數，便要通分。盈、不足與同買物若相關，列出所出率，以少減多，用餘數去約「法」、「實」。「實」約後為物價，「法」約後為人數。

另一個算法是：將盈、不足相加作為「實」。以所出率以少減多，餘為「法」。得出的結果為人數。減去盈數又或加回不足數，可得物價。

第 1 題

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？
答曰：七人，物價五十三。

- 置所出率，盈、不足各居其下

左	右
8	7
多 3	差 4
- 令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法
維乘： $8 \times 4 = 32$ 、 $3 \times 7 = 21$ 實： $32 + 21 = 53$ 法： $3 + 4 = 7$
- 實如法而一
每人應付出的「率」為 $53 \div 7$
- 有分者，通之
因為不涉及分數，略過。
- 置所出率，以少減多，餘
餘數為： $8 - 7 = 1$
- 以約法、實。實為物價，法為人數
物價： $53 \div 1 = 53$ 人數： $7 \div 1 = 7$
- 其一術曰：并盈、不足為實。以所出率以少減多，餘為法
實： $3 + 4 = 7$ 法： $8 - 7 = 1$
- 實如法得一人。以所出率乘之
一人： $7 \div 1 = 7$ ， $7 \times 8 = 56$ $7 \times 7 = 49$
- 減盈、增不足即物價
物價： $56 - 3 = 53$ ， $49 + 4 = 53$

第 2 題

今有共買雞，人出九，盈一十一；人出六，不足十六。問人數、雞價各幾何？
答曰：九人，雞價七十。

- 置所出率，盈、不足各居其下

左	右
9	6
盈 11	不足 16
- 令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法
維乘： $9 \times 16 = 144$ 、 $11 \times 6 = 66$ 實： $144 + 66 = 210$ 法： $11 + 16 = 27$
- 實如法而一
每人應付出的「率」為 $210 \div 27$
- 有分者，通之
 $210 \div 27 = \frac{70}{9}$
- 置所出率，以少減多，餘
餘數為： $9 - 6 = 3$
- 以約法、實。實為物價，法為人數
物價： $210 \div 3 = 70$ 人數： $27 \div 3 = 9$

- 其一術曰：并盈、不足爲實。以所出率以少減多，餘爲法

$$\text{實：} 11 + 16 = 27 \quad \text{法：} 9 - 6 = 3$$

- 實如法得一人。以所出率乘之

$$\text{一人：} 27 \div 3 = 9, \quad 9 \times 9 = 81 \quad 9 \times 6 = 54$$

- 減盈、增不足即物價

$$\text{物價：} 81 - 11 = 70, \quad 54 + 16 = 70 \quad \text{合問}$$

第 3 題

今有共買璉，人出半，盈四；人出少半，不足三。問人數、璉價各幾何？
 答曰：四十二人，璉價十七。

- 在第 3 題下，劉徽注有：

注云若兩設有分者，齊其子，同其母。此問兩設俱見零分，故齊其子，同其母。又云令下維乘上，訖，以同約之。不可約，故以乘，同之。

- 劉徽的注文亦不好理解，清李潢在《九章算術細草圖說》卷七盈不足有以下的補充：

- 置所出率，盈、不足各居其下

左	右	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	(原文沒有這一行)
子 1 母 2	子 1 母 3	
盈 4	不足 3	

- (清)李潢(?-1812)：次置所出率，齊而同之，則二分之一爲六分之三，三分之一爲六分之二

左	右
子 3 母 6	子 2 母 6
盈 4	不足 3

此即劉徽的注文齊其子，同其母，「齊同」是指通分和擴分。此問兩設俱見零分，故齊其子，同其母，意指這兩個分數不是帶分數，是故可以如此處理；

- 令維乘所出率，并以爲實。并盈、不足爲法，李潢：令不足三維乘三得九，令盈四維乘二得八；并之得十七，爲實，即璉價也；并盈四不足三，得七，以分母六乘之，得四十二爲法，即人數也

$$\text{維乘：} 3 \times 3 = 9, \quad 4 \times 2 = 8 \quad \text{實：} 9 + 8 = 17 \quad \text{法：} (4 + 3) \times 6 = 42,$$

$$\text{人數} = 42, \quad \text{璉價} = 17$$

- 爲甚麼要再乘 6？是因爲處理 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 兩個分數，透過通分(同其母)，得 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ，再以 $4 + 3$ (并盈、不足)被 $\frac{1}{6}$ 除，得 $7 \div \frac{1}{6}$ ，因不可約，故以乘，得 42。

- 是以李潢續注有：

其一術，草曰：并盈不足三得七，以分母六乘之，得四十二爲實；以分子二減分子三，餘一爲法，實如法得四十二，即人數也；副置人數四十二，以人出半乘之，得二十一，減盈四，得十七；以人出少半乘之，得十四，增不足三，亦得十七，即璉價也，合問。

第 4 題

今有共買牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。問家數、牛價各幾何？
 答曰：一百二十六家，牛價三千七百五十。

- 在第 4 題下，劉徽注有：

按此術并盈不足者，爲眾家之差，故以爲實。置所出率各以家數除之，各得一家所出率，以少減多者得一家之差。以除，即家數。以多率乘之，減盈，故得牛價也。

這一個注實是道出整個「一盈、一不足」底下的算法原理。盈不足的差異，是因為所出率的不同，再由家的數目再擴大，

所出率的差 × 家的數目 = 總數的相差 = 盈不足的相差 = 盈 + 不足

- 是以在講述「盈不足術」之後，劉徽再補充：此術意謂盈不足為眾人之差，以所出率以少減多，餘為一人之差。以一人之差約眾人之差，故得人數也。
- 李潢：買牛草曰：置七家共出一百九十，即七分之一百九十；九家共出二百七十，即九分之二百七十；齊而同之，得六十三分之一千七百一十於右行，不足三百三十居下，得六十三分之一千八百九十於左行，盈三十居其下

	左行	右行	
人出	1890	1710	分母為 63
盈 30		不足 330	

- 李潢：令左行盈三十，維乘右行所出一千七百一十，得六十三分之五萬一千三百，不足三百三十於右行；令右行不足三百三十維乘左行所出一千八百九十，得六十三分之六十二萬三千七百，盈三十於左行

由維乘得： $30 \times \frac{1710}{63} = \frac{51300}{63}$ 、 $330 \times \frac{1890}{63} = \frac{623700}{63}$

- 李潢：并之得六十七萬五千為實；以不足三百三十并盈三十得三百六十，復以分母六十三乘之，得二萬二千六百八十為法，乃置所出分子一千七百一十減一千八百九十，餘一百八十，以約法二萬二千六百八十得一百二十六，即家數也，以約實六十七萬五千得三千七百五十即牛價也，合問

實：51300 + 623700 = 67500 法：(330 + 13) × 63 = 22680 所出：1890 - 1710 = 180
(法、實、所出皆已倍大 6)

牛價 : 67500 ÷ 180 = 3750 家數：22680 ÷ 180 = 126

《九章算術注》原文

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？

答曰：七人，物價五十三。

今有共買雞，人出九，盈一十一；人出六，不足十六。問人數、雞價各幾何？

答曰：九人，雞價七十。

今有共買璉，人出半，盈四；人出少半，不足三。問人數、璉價各幾何？

答曰：四十二人，璉價十七。

注云若兩設有分者，齊其子，同其母。此問兩設俱見零分，故齊其子，同其母。又云令下維乘上，訖，以同約之。不可約，故以乘，同之。

今有共買牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。問家數、牛價各幾何？

答曰：一百二十六家，牛價三千七百五十。

按此術并盈不足者，為眾家之差，故以為實。置所出率各以家數除之，各得一家所出率，以少減多者得一家之差。以除，即家數。以多率乘之，減盈，故得牛價也。

盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法。實如法而一。按盈者，謂之朧；不足者，謂之朧。所出率謂之假令。盈朧維乘而設者欲為同齊之意。按“共買物，人出入，盈三；人出七，不足四”，齊其假令，同其盈朧，盈朧俱十二。通計齊則不盈不朧之正數，故可併之為實，并盈、不足為法。齊之三十二者，是四假令，有盈十二。齊之二十一者，是三假令，亦朧十二。并七假令合為一實，故并三、四為法。有分者，通之。若兩設有分者，齊其子，同其母。令下維乘上，訖，以同約之。盈不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實。實為物價，法為人數。所出率以少減多者，餘謂之設差。以為少設，則并盈朧，是為定實。故以少設約定實，則法為人數，適足之實故為物價。盈、朧當與少設相通。不可遍約，亦當分母乘，設差為約法實。

其一術曰：并盈、不足為實。以所出率以少減多，餘為法。實如法得一人。以所出率乘之，減盈、增不足即物價。此術意謂盈不足為眾人之差，以所出率以少減多，餘為一人之差。以一人之差約眾人之差，故得人數也。

參考資料

1. 沈康身. 中算導論. 上海教育出版社, 1986(P.85)
2. 《九章算術》卷第七盈不足(http://www.mathsgreat.com/CMhist/jiuzhang/jiuzhang_009.pdf)
3. 曾海龍. 九章算術. 江蘇人民出版社, 2011(P.160)
4. 《九章算術》中的「盈不足術」. (http://mathsgreat.com/gsjj/gsjj_013.pdf)
5. 《續古摘奇算法》盈不足(http://www.mathsgreat.com/CMhist/yhsf/yhsf_06_02.pdf)
6. 《九章算術細草圖說》卷七盈不足(http://www.mathsgreat.com/CMhist/ssjxc/ssjxc_07_01.pdf)