九章算術

西漢　張蒼　耿壽昌　編定
魏　劉　徽　注
唐　李淳風等　注釋
郭書春　校點

九章算術卷第八

魏劉徽注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉李淳風等注釋

方程　以御錯糅正負

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉九斗四分斗之一，
中禾一秉四斗四分斗之一，
下禾一秉二斗四分斗之三。

方程 程，課程也。群物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，並列爲行，故謂之方程。行之左右無所同存，且爲有所據而言耳。此都術也，以空言難左曉，故特繫之禾以決之。又列中、行如右行也 。術曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗於右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行，而以直除。 爲術之意，令少行減多行，返覆相減，則頭位必先盡。上無一位，則此行亦闕一物矣。然而舉率以相減，不害餘數之課也。若消去頭位，則下去一物之實。如是直令左右行相減，審其正負，則可得而知。先令右行上禾乘中行，爲齊同之意。爲齊同者，謂中行直減右行也。從簡易雖不言齊同，以齊同之意觀之，其義然矣 。又乘其次，亦以直除。復去左行首。然以中行中禾不盡者遍乘左行，而以直除。 亦令兩行相去行之中禾也 。左方下禾不盡者，上爲法，下爲實。實即下禾之實。 上、中禾皆去，故餘數是下禾實，非但一秉。欲約眾秉之實，當以禾秉數以爲法。則此，以下禾之秉數乘兩行，以直除，則下禾之位皆決矣。各以其餘一位之秉除其下實。則計數矣，用算繁而不省。所以別爲法，約也。然猶不如自用其舊，廣異法也 。求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實。 此謂中兩禾實，下禾一秉實數先見，將中秉求中禾，其列實以減下實。而左方下禾雖去一秉，以法爲母，於率不通。故先以法乘，其通而同之。俱令法爲母，而除下禾實。以下禾先見之實令乘下禾秉數，即得下禾一位之列實。減於下實，則其數是中禾之實也 。餘，如中禾秉數而一，即中禾之實。 餘，中禾一位之實也。故以一位秉數約之，乃得一秉之實也 。求上禾，亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。 此右行三禾共實，合三位之實，故以二位秉數約之，乃得一秉之實。今中、下禾之實，其數并見，令乘右行之禾秉以減之，故亦如前，各求列實，以減下實也 。餘，如上禾秉數而一，即上禾之實。實皆如法，各得一斗。 三實同用。不滿法者，以法命之。母、實皆當約之。

今有上禾七秉，損實一斗，益之下禾二秉，而實一十斗；下禾八秉，益實一斗，與上禾二秉，而實一十斗。問上、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉實一斗五十二分斗之一十八，
下禾一秉實五十二分斗之四十一。

術曰：如方程。損之曰益，益之曰損。 問者之辭雖？今按：實云上禾七秉、下禾二秉，實一十一斗；上禾二秉、下禾八秉，實九斗也。“損之曰益”，言損一斗，餘當一十斗。今欲全其實，當加所損也。“益之曰損”，言益實以一斗，乃滿一十斗。今欲知本實，當減所如，即得也 。損實一斗者，其實過一十斗也；益實一斗者，其實不滿一十斗也。 重諭損益數者，各以損益之數損益之也。

今有上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉，實皆不滿斗。上取中、中取下、下取上各一秉而實滿斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉實二十五分斗之九，
中禾一秉實二十五分斗之七，
下禾一秉實二十五分斗之四。

術曰：如方程。各置所取。 置上禾二秉爲右行之上，中禾三秉爲中行之中，下禾四秉爲左行之下。所取一秉及實一斗各從其位。諸行相借取之物，皆依此例 。以正負術入之。

正負術曰： 今兩兩筭得失相反，要令正負以名之。正筭赤，負筭黑。否則以邪正爲異。方程自有赤、黑相取，法、實數相推求之術，而其并減之勢不得廣通，故使赤、黑相消奪之。於筭或減或益，同行異位殊爲二品，各有併、減之差見於下焉。著此二條，特繫之禾以成此二條之意。故赤、黑相雜足以定上下之程，減、益雖殊足以通左右之數，差、實雖分足以應同異之率。然則其正無入以負之，負無入以正之，其率不妄也 。同名相除， 此謂以赤除赤，以黑除黑。行求相減者，爲去頭位也。然則頭位同名者當用此條；頭位異名者當用下條 。異名相益， 益行減行，當各以其類矣。其異名者，非其類也。非其類者，猶無對也，非所得減也。故赤用黑對則除黑，無對則除，黑；黑用赤對則除赤，無對則除，赤；赤、黑併於本數。此爲相益之，皆所以爲消奪。消奪之與減益成一實也。術本取要，必除行首，至於他位，不嫌多少，故或令相減，或令相併，理無同異而一也 。正無入負之，負無入正之。 無入，爲無對也。無所得減，則使消奪者居位也。其當以列實或減下實，而行中正、負雜者亦當此條。此條者，同名減實、異名益實，正無入負之，負無入正之也 。其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。 此條異名相除爲例，故亦與上條互取。凡正負所以記共同異，使二品互相取而已矣。言負者未必負於少，言正者未必正於多。故每一行之中雖復赤黑異筭無傷。然則可得使頭位常相與異名。此條之實兼通矣，遂以二條反復一率。觀其每與上下互相取位，則隨筭而言耳，猶一術也。又，本設諸行，欲因成數以相去耳，故其多少無限，令上下相命而已。若以正負相減，如數有舊增法者，每行可均之，不但數物左右之也。

今有上禾五秉，損實一斗一升，當下禾七秉；上禾七秉，損實二斗五升，當下禾五秉。問上、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉五升，
下禾一秉二升。

術曰：如方程。置上禾五秉正，下禾七秉負，損實一斗一升正。 言上禾五秉之實多，減其一斗一升，餘，是與下禾七秉相當數也。故互其筭，令相折除，以一斗一升爲差。爲差者，上禾之餘實也 。次置上禾七秉正，下禾五秉負，損實二斗五升正。以正負術入之。 按：正負之術本設列行，物程之數不限多少，必令與實上、下相次，而以每行各自爲率。然而或減或益，同行異位 殊爲二品，各自併、減之差見於下也。

今有上禾六秉，損實一斗八升，當下禾一十秉；下禾一十五秉，損實五升，當上禾五秉。問上、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉實八升，
下禾一秉實三升。

術曰：如方程。置上禾六秉正，下禾一十秉負，損實一斗八升正。次，上禾五秉負，下禾一十五秉正，損實五升正。以正負術入之。 言上禾六秉之實多，減損其一斗八升，餘，是與下禾十秉相當之數。故亦互其筭，而以一斗八升爲差實。差實者，上禾之餘實。

今有上禾三秉，益實六斗，當下禾一十秉；下禾五秉，益實一斗，當上禾二秉。問上、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉實八斗，
下禾一秉實三斗。

術曰：如方程。置上禾三秉正，下禾一十秉負，益實六斗負。次置上禾二秉負，下禾五秉正，益實一斗負。以正負術入之。 言上禾三秉之實少，益其六斗，然後於下禾十秉相當也。故亦互其筭，而以六斗爲差實。差實者，下禾之餘實。

今有牛五、羊二，直金十兩；牛二、羊五，直金八兩。問牛、羊各直金幾何？

答曰：牛一直金一兩二十一分兩之一十三，

羊一直金二十一分兩之二十。

術曰：如方程。 假令爲同齊，頭位爲牛，當相乘。右行定，更置牛十，羊四，直金二十兩；左行牛十，羊二十五，直金四十兩。牛數等同，金多二十兩者，羊差二十一使之然也。以少行減多行，則牛數盡，惟羊與直金之數見，可得而知也。以小推大，雖四、五行不異也。

今有賣牛二、羊五，以買一十三豕，有餘錢一千；賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足；賣六羊、八豕，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？

答曰：牛價一千二百，
羊價五百，
豕價三百。

術曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三負，餘錢數正；次，牛三正，羊九負，豕三正；次，五牛負，六羊正，八豕正，不足錢負。以正負術入之。 此中行買、賣相折，錢適足，故但互買、賣筭而已。故下無錢直也。設欲以此行如方程法，先令二牛遍乘中行，而以右行直除之。是終於下實虛缺矣，故注曰正無實負，負無實正，方爲類也。方將以別實加適足之數與實物作實。
盈不足章黃金白銀與此相當。“假令黃金九、白銀一十一，稱之重適等。交易其一，金輕十三兩。問金、銀一枚各重幾何？”與此同。

今有五雀六燕，集稱之衡，雀俱重，燕俱輕。一雀一燕交而處，衡適平。并雀、燕重一斤。問雀、燕一枚各重幾何？

答曰：雀重一兩一十九分兩之一十三，
燕重一兩一十九分兩之五。

術曰：如方程。交易質之，各重八兩。 此四雀一燕與一雀五燕衡適平。并重一斤，故各八兩。列兩程數。左行頭位其數有一者，令右行遍除，亦可令於左行而取其法、實於左。左行數多，以右行取其數。左頭位減盡，中、下位筭當燕與實。右行不動，左上空。中法，下實，即每枚當重宜可知也。 按：此四雀一燕與一雀五燕其重等，是三雀四燕重相當，雀率重四，燕率重三也。諸再程之率皆可異術求也，即其數也。

今有甲乙二人持錢不知其數。甲得乙半而錢五十，乙得甲太半而亦錢五十。問甲、乙持錢各幾何？

答曰：甲持三十七錢半，
乙持二十五錢。

術曰：如方程。損益之。 此問者言一甲、半乙而五十，太半甲、一乙亦五十也。各以分母乘其全，內子，行定：二甲、一乙而錢一百；二甲、三乙而錢一百五十。於是乃如方程。諸物有分者放此。

今有二馬、一牛價過一萬，如半馬之價；一馬、二牛價不滿一萬，如半牛之價。問牛、馬價各幾何？

答曰：馬價五千四百五十四錢一十一分錢之六，
牛價一千八百一十八錢一十一分錢之二。

術曰：如方程。損益之。 此一馬半與一牛價直一萬也，二牛半與一馬亦直一萬也。一馬半與一牛直錢一萬，通分內子，右行爲三馬、二牛，直錢二萬。二牛半與一馬直錢一萬，通分內子，左行爲二馬、五牛，直錢二萬也。

今有武馬一匹，中馬二匹，下馬三匹，皆載四十石至阪，皆不能上。武馬借中馬一匹，中馬借下馬一匹，下馬借武馬一匹，乃皆上。問武、中、下馬一匹各力引幾何？

答曰：武馬一匹力引二十二石七分石之六，
中馬一匹力引一十七石七分石之一，
下馬一匹力引五石七分石之五。

術曰：如方程。各置所借。以正負術入之。

今有五家共井，甲二綆不足，如乙一綆；乙三綆不足，以丙一綆；丙四綆不足，以丁一綆；丁五綆不足，以戊一綆；戊六綆不足，以甲一綆。如各得所不足一綆，皆逮。問井深、綆長各幾何？

答曰：井深七丈二尺一寸，
甲綆長二丈六尺五寸，
乙綆長一丈九尺一寸，
丙綆長一丈四尺八寸，
丁綆長一丈二尺九寸，
戊綆長七尺六寸。

術曰：如方程。以正負術入之。 此率初如方程爲之，名各一逮井。其後，法得七百二十一，實七十六，是爲七百二十一綆而七十六逮井，并用逮之數以法除實者，而戊一綆逮井之數定，逮七百二十一分之七十六。是故七百二十一爲井深，七十六爲戊綆之長，舉率以言之。

今有白禾二步、青禾三步、黃禾四步、黑禾五步，禾實各不滿斗。白取青、黃，青取黃、黑，黃取黑、白，黑取白、青，各一步，而實滿斗。問白、青、黃、黑禾實一步各幾何？

答曰：白禾一步實一百一十一分斗之三十三，
青禾一步實一百一十一分斗之二十八，
黃禾一步實一百一十一分斗之一十七，
黑禾一步實一百一十一分斗之一十。

術曰：如方程。各置所取。以正負術入之。

今有甲禾二秉、乙禾三秉、丙禾四秉，重皆過於石：甲二重如乙一，乙三重如丙一，丙四重如甲一。問甲、乙、丙禾一秉各重幾何？

答曰：甲禾一秉重二十三分石之一十七，
乙禾一秉重二十三分石之一十一，
丙禾一秉重二十三分石之一十。

術曰：如方程。置重過於石之物爲負。 此問者言甲禾二秉之重過於一石也。其過者何云？如乙一秉重矣。互言其筭，令相折除，而一以石爲之差實。差實者，如甲禾餘實，故置筭相與同也 。以正負術入之。 此入，頭位異名相除者，正無入正之，負無入負之也。

今有令一人、吏五人、從者一十人，食雞一十；令一十人、吏一人、從者五人，食雞八；令五人、吏一十人、從者一人，食雞六。問令、吏、從者食雞各幾何？

答曰：令一人食一百二十二分雞之四十五，
吏一人食一百二十二分雞之四十一，
從者一人食一百二十二分雞之九十七。

術曰：如方程。以正負術入之。

今有五羊、四犬、三雞、二兔直錢一千四百九十六；四羊、二犬、六雞、三兔直錢一千一百七十五；三羊、一犬、七雞、五兔直錢九百五十八；二羊、三犬、五雞、一兔直錢八百六十一。問羊、犬、雞、兔價各幾何？

答曰：羊價一百七十七，
犬價一百二十一，
雞價二十三，
兔價二十九。

術曰：如方程。以正負術入之。

今有麻九斗、麥七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直錢一百四十；麻七斗、麥六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直錢一百二十八；麻三斗、麥五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直錢一百一十六；麻二斗、麥五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直錢一百一十二；麻一斗、麥三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直錢九十五。問一斗直幾何？

荅曰：麻一斗七錢，
麥一斗四錢，
菽一斗三錢，
荅一斗五錢，
黍一斗六錢。

術曰：如方程。以正負術入之。 此麻麥與均輸、少廣之章重衰、積分，皆爲大事。其拙於精理徒按本術者，或用筭而布氈，方好煩而喜誤，曾不知其非，反欲以多爲貴。故其算也，莫不闇於設通而專於一端。至於此類，苟務其成，然或失之，不可謂要約。更有異術者，庖丁解牛，游刃理間，故能歷久其刃如新。夫數，猶刃也，易簡用之則動中庖丁之理。故能和神愛刃，速而寡尤。凡九章爲大事，按法皆不盡一百筭也。雖布筭不多，然足以算多。世人多以方程爲難，或盡布筭之象在綴正負而已。未暇以論其設動無方，斯膠柱調瑟之類。聊復恢演，爲作新術，著之於此，將亦啓導疑意。網羅道精，豈傳之空言？記其施用之例，著策之數，每舉一隅焉。

方程新術曰：以正負術入之。令左、右相減，先去下實，又轉去物位，則其求一行二物正、負相借者，是其相當之率。又令二物與佗行互相去取，轉其二物相借之數，即皆相當之率也。各據二物相當之率，對易其數，即各當之率也。更置成行及其下實，各以其物本率今有之，求其所同，并，以爲法。其當相并而行中正負雜者，同名相從，異名相消，餘以爲法。以下置爲實。實如法，即合所問也。一物各以本率今有之，即皆合所問也。率不通者，齊之。

其一術日：置群物通率爲列衰。更置成行群物之數，各以其率乘之，并，以爲法。其當相并而行中正負雜者，同名相從，異名相消，餘爲法。以成行下實乘列衰，各自爲實。實如法而一，即得。以舊術爲之，凡應置五行。今欲要約。先置第三行，減以第四行，又減第五行；次置第二行，以第二行減第一行，又減第四行，去其頭位；餘，可半，次置右行及第二行，去其頭位；次以右行去第四行頭位；次以左行去第二行頭位；次以第五行去第一行頭位；次以第二行去第四行頭位；餘，可半；以右行去第二行頭位，以第二行去第四行頭位。餘，約之爲法實，實如法而一，得六，即有黍價。以法治第二行，得荅價，右行得菽價，左行得麥價，第三行麻價。如此凡用七十七筭。

以新術爲此：先以第四行減第三行。次以第三行去右行及第二行、第四行下位。又以減左行下位，不足減乃止。次以左行減第三行下位，次以第三行去左行下位。訖，廢去第三行。次以第四行去左行下位，又以減右行下位。次以右行去第二行及第四行下位。次以第二行減第四行及左行頭位。次以第四行減左行菽位，不足減乃止。次以左行減第二行頭位，餘，可再半。次以第四行去左行及第二行頭位。次以第二行去左行頭位。餘，約之，上得五，下得三，是菽五當荅三。次以左行去第二行菽位，又以減第四行及右行菽位，不足減乃止。次以右行減第二行頭位，不足減乃止。次以第二行去右行頭位。次以左行去右行頭位。餘，上得六，下得五。是爲荅六當黍五。次以左行去右行荅位。餘，約之。上爲二，下爲一。次以右行去第二行下位正，以第二行去第四行下位，又以減左行下位。次，左行去第二行下位。餘，上得三，下得四。是爲麥三當菽四。次以第二行減第四行下位。次以第四行去第二行下位。餘，上得四，下得七，是爲麻四當麥七。是爲相當之率舉矣。據麻四當麥七，即麻價率七而麥價率四；又麥三當菽四，即爲麥價率四而菽價率三；又菽五當荅三，即爲菽價率三而荅價率五；又荅六當黍五，即爲荅價率五而黍價率六；而率通矣。更置第三行，以第四行減之，餘有麻一斗、菽四斗正，荅三斗負，下實四正。求其同爲麻之數，以菽率三、荅率五各乘其斗數，如麻率七而一，菽得一斗七分斗之五正，荅得二斗七分斗之一負。即菽、荅化爲麻，以并之，令同名相從，異名相消，餘得定麻七分斗之四，以爲法。置四爲實，而分母乘之，實得二十八，而分子化爲法矣。以法除得七，即麻一斗之價。置麥率四、菽率三、荅率五、黍率六，皆以麻乘之，各自爲實。以麻率七爲法，所得即各爲價。 亦可使置本行實與物同通之，各以本率今有之，求其本率所得，并，以爲法。如此，即無正負之異矣，擇異同而已。 又可以一術爲之：置五行通率，爲麻七、麥四、菽三、荅五、黍六以爲列衰。成行麻一斗、菽四斗正，荅三斗負，各以其率乘之，訖，令同名相從，異名相消，餘爲法。又置下實乘列衰，所得各爲實。此可以置約法，即不復乘列衰，各以列衰爲價。如此即凡用一百二十四筭也。